II. Yol: Verilen fonksiyonun x e göre 1. ve 2. mertebeden türevlerini bulalım :

$$\begin{aligned} y'_x &= -2x\sin x^2, \\ y''_{xx} &= -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2. \end{aligned}$$

O halde, (4.28) formülüne göre

$$\begin{aligned} d^2y &= y''_{xx}dx^2 + y'_x d^2x \\ &= -2(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2)dx^2 - 2x\sin x^2 d^2x \end{aligned}$$

bulunur.
(b) x bağımsız değişken olsun. Bu durumda, $d^2x = 0$ olacağından (4.25) ten dolayı

$$d^2y = y''_{xx}dx^2 = -2(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2)dx^2$$

olur. ⋄

4.3.1 Çözümlü Problemler

(1) $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 3. mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda $y = f(e^x)$ fonksiyonunun y''' türevini bulunuz.
Çözüm: Bileşik fonksiyonun türev formülüne göre

$$\begin{aligned} y' &= (f(e^x))' = f'(e^x)(e^x)' = f'(e^x)e^x, \\ y'' &= (y')' = (f'(e^x)e^x)' = (f'(e^x))'e^x + f'(e^x)(e^x)' \\ &= f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$y''' = (y'')' = f'''(e^x)e^{3x} + 3f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x$$

bulunur. ⋄

(2) u ile v 2. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olduğunda aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının 2. mertebeden diferansiyelini bulunuz.
(a) $y = \arctan \frac{u}{v}$; (b) $y = ue^{-v^2}$.

Çözüm: (a) 1. mertebeden diferansiyel şeklinin invaryantlığından

$$\begin{aligned} dy &= d(\arctan \frac{u}{v}) = (\arctan \frac{u}{v})' d(\frac{u}{v}) \\ &= \frac{1}{1 + (\frac{u}{v})^2} \frac{vdu - udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2} \ . \end{aligned}$$

2. mertebeden diferansiyelin tanımına göre

$$d^2y = d(dy) = d(\frac{vdu - udv}{u^2 + v^2})$$

[kesrin diferansiyeli formülünden]

$$= \frac{(u^2 + v^2)d(vdu - udv) - (vdu - udv)d(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2)^2}$$

$[d(vdu - udv)] = dvdu + vd(du) - dudv - vd(dv)$

$= vd^2u - ud^2v, \ d(u^2 + v^2) = d(u^2) + d(v^2) = 2udu + 2vdv$ olduğundan]

$$= \frac{vd^2u - ud^2v}{u^2 + v^2} - \frac{2\{uv[(du)^2 - (dv)^2] + (v^2 - u^2)\}dudv}{(u^2 + v^2)^2}$$

bulunur.

(b) $dy = d(ue^{-v^2}) = e^{-v^2}du + ud(e^{-v^2})$
$[d(e^{-v^2}) = e^{-v^2}d(-v^2) = -2ve^{-v^2}dv$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= e^{-v^2}du - 2uve^{-v^2}du = e^{-v^2}(du - 2uvdv) \ . \\ d^2y &= d(dy) \\ &= (du - 2uvdv)d(e^{-v^2}) + e^{-v^2}d(du - 2uvdv) \\ &= -2ve^{-v^2}dv(du - 2uvdv) + e^{-v^2}(d(du - 2(uvdv)) \end{aligned}$$

$[d(du) = d^2u, d(uvdv) = dvd(uv) + uvd(dv) = vdudv + udv^2 + uvd^2v$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= -2ve^{-v^2}dv(du - 2uvdv) + e^{-v^2}(d^2u - 2vdudv - 2udv^2 - 2uvd^2v)) \\ &= e^{-v^2}(d^2u - 2uvd^2v - uvdudv + 2u(2v^2 - 1)dv^2)) \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(3)

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

parametrik denklemle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun y'''_{x^3} türevini bulunuz.

Çözüm:

$$y'_x = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

olduğuna göre, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ için

$$\begin{aligned}
y'_x &= \frac{d(3t-t^3)}{d(2t-t^2)} = \frac{(3-3t^2)dt}{(2-2t)dt} = \frac{3}{2}(1+t), \\
y''_{x^2} &= \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(\frac{3}{2}(1+t))}{d(2t-t^2)} = \frac{\frac{3}{2}dt}{2(1-t)dt} = \frac{3}{4(1-t)}, \\
y'''_{x^3} &= \frac{d(y''_{x^2})}{dx} = \frac{d(\frac{3}{4(1-t)})}{d(2t-t^2)} = \frac{d(\frac{3dt}{4(1-t)^2})}{2(1-t)dt} = \frac{3}{8(1-t)^3}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(4) $x^2+y^2 = 5xy^3$ denklemi ile kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonunun $y''(x)$ türevini bulunuz.

Çözüm: $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında verilen denklemin 2. mertebeden türevlenebilen bir çözümü varolsun, yani $\forall x \in I$ için

$$x^2 + (y(x))^2 = 5x(y(x))^3$$

eşitliği sağlansın. Burada, her iki tarafın x 'e göre türevini alırsak, zincir kuralından

$$\begin{aligned}
2x + 2y(x)y'(x) &= 5y^3(x) + 15xy^2(x).y'(x) \Rightarrow \\
y'(x) &= \frac{2x - 5y^3(x)}{15xy^2(x) - 2y(x)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned} y'' &= (y'(x))' = \left(\frac{2x-5y^3(x)}{15xy^2(x)-2y(x)}\right)' \\ &= \frac{20y^3(x)-75xy^4(x)-60x^2y(x)+4x)y'(x)-4y(x)+75y^5(x)}{(15xy^2(x)-2y(x))^2} \end{aligned}$$

$[y'(x) = \frac{2x-5y^3(x)}{15xy^2(x)-2y(x)}$ olduğundan]

$$= \frac{1500xy^6(x)-120x^3+150x^2y^3(x)-250y^5(x)}{(15xy(x)-2)^3y^2(x)}$$

bulunur. ◇

(5) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ fonksiyonunun $y^{(n)}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \\ &= (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1} \end{aligned}$$

olduğuna göre, Örnek 4.3.2(f) den

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= ((x-2)^{-1})^{(n)} - ((x-1)^{-1})^{(n)} \\ &= (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{(n+1)}} - \frac{1}{(x-1)^{(n+1)}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. ◇

(6) $y = \sin^3 x$ fonksiyonunun $y^{(n)}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ olduğuna göre,

$$y^{(n)} = \left(\frac{3}{4}\sin x\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{4}\sin 3x\right)^{(n)}$$

$[(\sin ax)^{(n)} = a^n.\sin(ax + n.\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$ olduğundan]

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin\left(3x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur. ◇

(7) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ fonksiyonunun $y^{(n)}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ olduğuna göre,

$$y^{(n)} = (\frac{3}{4})^{(n)} + (\frac{1}{4}\cos 4x)^{(n)}$$

$[(\cos ax)^{(n)} = a^n . \cos(ax + n.\frac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}$ olduğundan $]$

$$= 4^{n-1}\cos(4x + n.\frac{\pi}{2})$$

bulunur. $\diamond$

(8) $y = \ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$ fonksiyonunun $y^{(100)}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a-bx}{a+bx}(\frac{a+bx}{a-bx})' \\ &= \frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)} \\ &= (\frac{a}{b}+x)^{-1} + (\frac{a}{b}-x)^{-1} \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = ((\frac{a}{b}+x)^{-1})^{(n-1)} + ((\frac{a}{b}-x)^{-1})^{(n-1)}$$

[Örnek 4.3.2(f) den]

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n-1}(n-1)!(\frac{a}{b}+x)^{-n} + (n-1)!((\frac{a}{b}-x)^{-n} \\ &= \frac{(n-1)!\cdots b^{n\,n}}{(a^2-b^2x^2)}((a+bx)^n + (-1)^{n-1}(a-bx)^n) \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(9) $y =\mid x \mid^3$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında hangi mertebeden türevlenebilirdir?

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$y'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \text{ ise}, \\ -3x^2, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve türev tanımına göre

$$y'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{y(0+h)-y(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|\, h\,|^2}{h} = 0$$

olduğu elde edilir. Demek ki, $\forall x \in \mathbb{R}$ için fonksiyon türevlenebilirdir ve $y'(x) = 3x^2 sgnx$ dir. Benzer şekilde, 2. mertebeden türev için

$$y''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \text{ ise,} \\ -6x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{y'(0+h)-y'(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3h^2\mathrm{sgn}h}{h} = 0 \end{aligned}$$

olduğu, dolayısıyla, fonksiyonunun 2. mertebeden türevlenebilir ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $y''(x) = 6 \mid x \mid$ olduğu elde edilir. $\mid x \mid$ fonksiyonu 0 da türevlenemez olduğundan verilen fonksiyon $x = 0$ da 3. mertebeden türevlenemez olup, 2. mertebeden türevlenebilirdir. $\diamond$

4.3.2 Ek Problemler

(10) u ve v 2. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olduğu durumda aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının d^2y diferansiyellerini bulunuz.

(a) $y = u(2+v)$; (b) $y = u\ln v$;
(c) $y = \sqrt{u^2+v^2}$; (d) $y = u^v$.

Cevap: (a) $d^2y = (v+2)d^2u + 2dudv + ud^2v$; (b) $d^2y = \ln v.d^2u + \frac{2}{v}dudv + \frac{u}{v}d^2v - \frac{u}{v^2}dv^2$; (c) $d^2y = \dfrac{(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)+(vdu-udv)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$;
(d) $d^2y = u^v(\frac{v}{u}d^2u + \ln ud^2v + \frac{v(v-1)}{u^2}du^2 + \frac{2(v\ln u+1)}{u}dudv + \ln^2 u.dv^2)$.

(11) Aşağıdaki parametrik denklemlerle tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının y''_{x^2} türevlerini bulunuz.

(a) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 \ ; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\cos 2t \ ; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)\sin t, \\ y = \sin^2 t\cos t \ ; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \frac{e^t}{1+t}, \\ y = (t-1)e^t \ ; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \sin\log_2 t, \\ y = \tan\log_2 t \ ; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t}, \\ y = 2^{\sin^2 t} \ . \end{cases}$

Cevap: (a) $\dfrac{-2}{9t^4}$; (b) $\dfrac{-8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$; (c) $\dfrac{1}{\cos^3 t(3\cos^3 t-1)}$;
(d) $\dfrac{2(1+t)^3}{te^t}$; (e) $\dfrac{3\sin\log_2 t}{\cos^5\log_2 t}$; (f) $2^{3\sin^2 t-1}$.

(12) Aşağıdaki denklemlerle kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının $y''(x)$ türevlerini bulunuz.

(a) $x^2+y^2 = a^2$; (b) $y^2 = 2px$;
(c) $e^{x-y} = x+y$; (d) $y - x\tan\ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$;
(e) $y^2 = e^{x^4-y^2}$.

Cevap: (a) $\dfrac{-a^2}{y^3}$; (b) $\dfrac{-p^2}{y^3}$; (c) $\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; (d) $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$;
(e) $\dfrac{2x^2y(3y^4+2(3-x^4)y^2+3+2x^4)}{(y^2+1)^3}$.

(13) Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

(a) $(f(x^2))^{(3)}$; (b) $(\sqrt{x})^{(10)}$;
(c) $(\frac{x^2}{x-1})^{(6)}$; (d) $(x^3\cos 5x)^{(15)}$.

Cevap: (a) $2xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$; (b) $-\dfrac{1.3.5\cdots 17}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$, $x>0$;
(c) $\dfrac{720}{(x-1)^7}$, $x\neq 1$; (d) $5^{14}(5x^3-126x)\sin 5x - 3.5^{13}(75x^2-182)\cos 5x$

(14) Aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının $y^{(n)}$ türevlerini bulunuz.
(a) $y = \cos^3 x$; (b) $y = \cos\alpha x\cos\beta x$;
(c) $y = (ax^2+bx+c)e^{kx}$;

(d) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $(a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n)$;
(e) $y = x \log_2(1 - 3x)$; (f) $y = e^{ax}\cos(bx + c)$;
(g) $y = e^{2x}\sin^2 x$; (h) $y = \cosh ax \sin bx$.

Cevap: (a) $\frac{3}{4}\cos(ax + n\frac{\pi}{2}) + \frac{3^n}{4}\cos(3x + n\frac{\pi}{2})$;
(b) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^n \cos[(\alpha - \beta)x + n\frac{\pi}{2})] + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^n \cos[(\alpha + \beta)x + n\frac{\pi}{2})]$;
(c) $k^{n-2}e^{kx}[(ax^2 + bx + c)k^2 + (2ax + b)nk + n(n - 1)a]$;
(d) $a_0n!$;
(e) $\frac{(n-2)!3^{n-1}}{\ln 2}(3x - n)(1 - 3x)^{-n}, n > 1$;
(f) $e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\varphi)$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

(g) $2^{n-1}e^{2x}(1 - 2^{\frac{n}{2}}\cos(2x + n.\frac{\pi}{4}))$;
(h) $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}(\cosh ax \cos(n\varphi - n\frac{\pi}{2})\sin(bx + n\frac{\pi}{2}) + \sinh ax \sin(n\varphi - n\frac{\pi}{2})\cos(bx + n\frac{\pi}{2})), \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(15) Aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının $x = 0$ noktasında hangi mertebeden türevlenebilirdirler.

(a) $y(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x > 0 \text{ ise}, \\ \ln(1 + x) - x, & x \geq 0 \text{ ise} ; \end{cases}$

(b) $y(x) = \begin{cases} \sinh x - x, & x < 0 \text{ ise}, \\ x - \sin x, & x \geq 0 \text{ ise} ; \end{cases}$

(c) $y(x) = \begin{cases} x^{100}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise} ; \end{cases}$

(d) $y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0\text{ise} . \end{cases}$

Cevap: (a) $y'(0) = 0, y''(0)$ türevi yoktur;
(b) $y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1,\ y^{(4)}(0) = 0\ \ y^{(5)}(0)$ türevi yoktur ;
(c) $y^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots, 50, y^{(51)}(0)$ türevi yoktur ;
(d) $y^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots$